◆まとめ　対数の意味(1)（簡易計算器　1 時間）

ここでは，割り箸を使って計算尺を作らせ，計算尺を使っていろいろな計算をさせた後，どうして計算ができるのかを考えさせる。はじめに導入で使った天才中学生の発見を，印刷して配布しておく。

天才中学生の発見

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	4	8	16	32	64
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
128	256	512	1024	2048	4096
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
8192	16384	32768	65536	131072	262144
19	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*
524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

7　＋　*9*　＝　*16*

128　×　512　＝　65536

22　－　*15*　＝　*7*

4194304　÷　32768　＝　128

4　×　*5*　＝　*20*

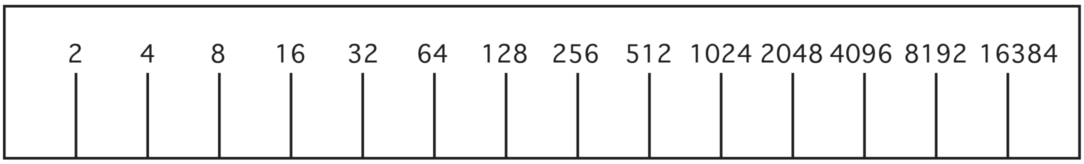
16　の　5 乗 ＝　1048576

真数の国	×	÷	n 乗
対数の国	＋	－	n 倍

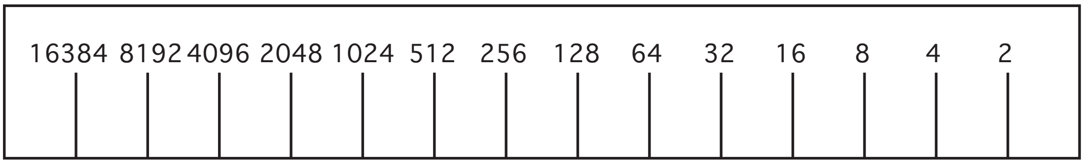
「今日はみんなにすばらしいものを作ってもらうぞ。かけ算，わり算ができてしまう不思議な計算器，計算尺の作成だ。材料は高価なものなので，先生のポケットから出させてもらった。材料はこれ（割り箸を見せる。生徒笑い）だ。総額は 180 円（生徒再び笑い）。
計算器を作った後，どうして計算ができるのか，みんなで考えてみよう。ヒントは今配ったプリントの中にある。」

用意する材料…割り箸（生徒分），木材２本（目盛りを打っておく），プリント

はじめに実際の見本を見せながら作業手順を説明する。「さて，この巨大割り箸を見てごらん（生徒笑い）。この巨大割り箸のように，まず割り箸に等間隔に目盛りを打ってほしい。間隔は自由だが，1cm ぐらいが適当だろう。」

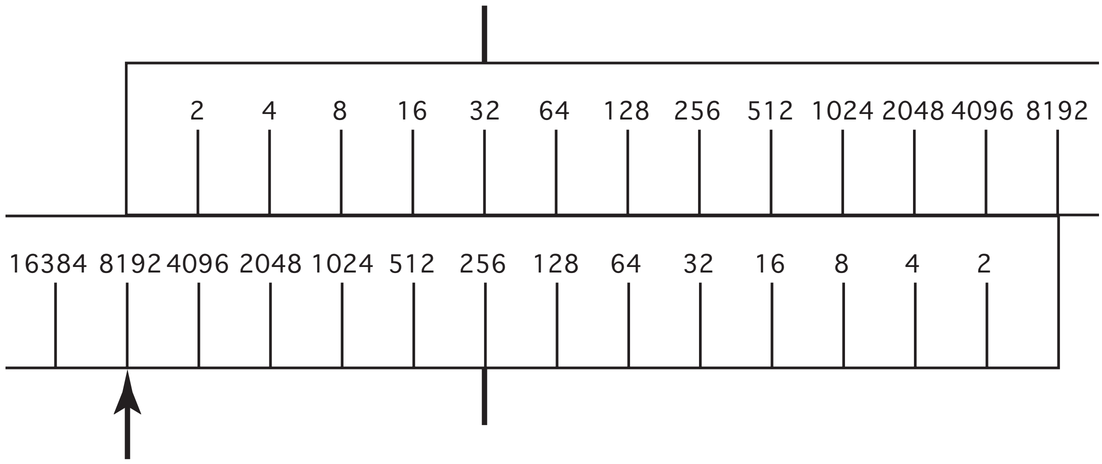


目盛りを打たせた後，上のように数字を記入させる。もう１本にも同様に目盛りを打たせ，さらに裏側にも等間隔に目盛りを打たせ，下のように数字を記入させる。



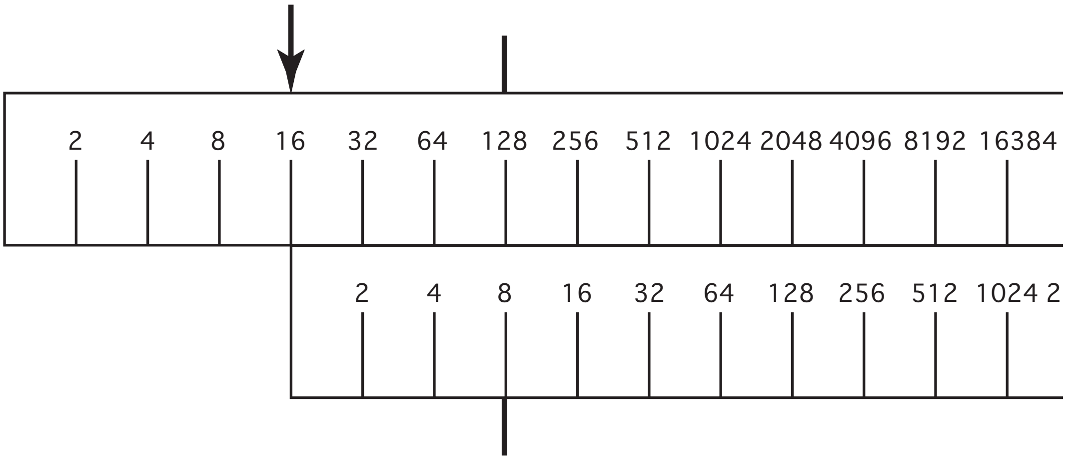
同方向に数字が記入されたものは，わり算用に使用され，逆方向に記入されたものは，かけ算用に使用される。つまり２本目の割り箸を表にしたり裏にしたりすると，かけ算やわり算ができるのである。表と裏の制作が終わったら，いよいよ簡易計算器による計算ということになる。まだ制作途中の生徒もいるので，一旦は制作をやめさせ，私の方を見るように指示する。そして，計算の仕方を説明する。

かけ算は，１本目と２本目の裏を使い次のように計算する。たとえば，32×256 ならば下図のように合わせる。



すると，左の矢印のところに答え 8192 が出ているのである。「あら不思議なことに一番左に答えが出ているではないか（生徒驚きの表情）。ほかの例で計算しても，必ず答えが出るね。さて，みんなも自分の割り箸を使って，計算してごらん。」生徒たちは計算に熱中する。お互いに問題を出し合ったり，筆算で確認したりしながら，生徒は驚きの度を深めている。頃合いをみてわり算の方に入る。

「さて，次はわり算に入るから，みんないったん作業をやめて先生の方を見てごらん。わり算は，２本目の表を使って計算するよ。巨大割り箸の２本目を反対にひっくりかえして，たとえば 128 と 8 を合わせると，128÷8 の答えが一番右側に 16 と出ている。その他で計算してもそうだ。今度はみんなが自分の割り箸を使って計算してごらん。割り箸をひっくり返すことを忘れないように。」生徒たちはまた計算に熱中する。生徒たちは感動を深めると同時に，どうして計算できるのかという疑問を深めることになる。

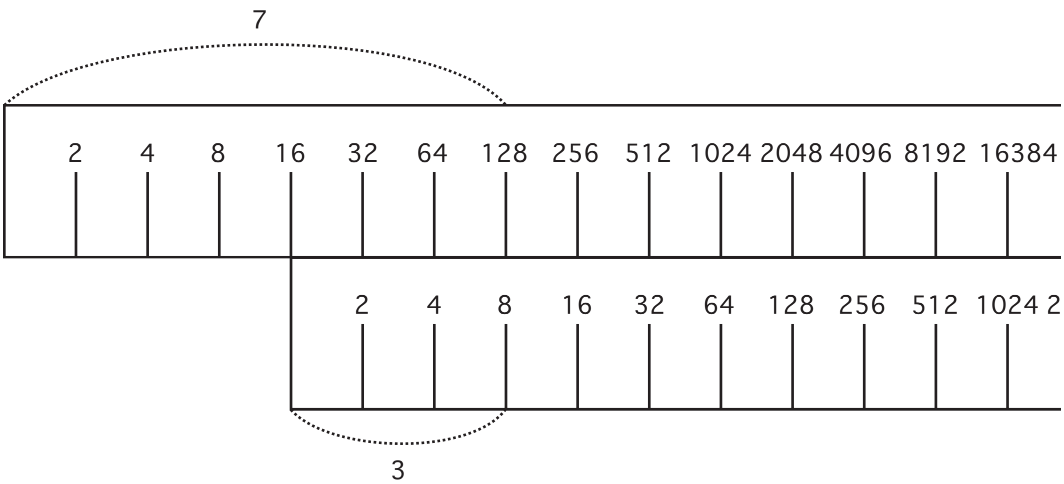


「どうだ，見事にわり算とかけ算ができてしまうだろう。本当に不思議なことだね。どうして，かけ算とわり算ができてしまうのか，考えてみよう。ヒントは最初に言ったようにプリント『天才中学生の発見』の中にある。よく考えてみよう。」

生徒に考えさせる。５分ぐらい時間をおいてから，複数を指名する。正解を言える生徒がいれば儲けものであるが，十中八九は答えられる生徒がいないと考えておいた方がいい。それでも，この考えさせる時間は貴重である。不思議さを深めさせ，印象の度合いを強めると同時に，一生懸命に頭を働かせるからである。このとき生徒たちは，左脳と右脳を協同させながら必死に考えるであろう。現代教育が失ってしまっているものの一つは，この考える時間である。

「そうだね。これは難しい問題だ。だからヒントを与えることにしよう。割り箸の目盛りのところに記入してある数字は，プリントの表のイタリックでない，大きめの数字と同じだ。この数字は真数だった。では表のイタリックになっている小さめの数字，すなわち対数は割り箸のどこに隠れているだろうか。」

上記のヒントを与えても，答えられる生徒がいれば，幸運な方である。何人かを指名する。４，５人も指名して答えられなければ，いよいよ指導者側が説明する。



「対数は割り箸の本当の長さだ。たとえば，左から数えて７目盛りのところに 128 という数字がある。みんなの場合は１目盛り 1cm で打ったから，左端から 7cm のところに 128 があることになる。次に 8 を見ると，8 は左から３目盛りのところにあるから，左端から 3cm のところにあることになる。」

ここで生徒に考えさせる。２，３分も待つと A が手を挙げてくれた。「先生，計算尺が物理的にやっている計算は，

7－3＝4

という計算です。これは対数の世界における計算です。それに対して，実際に記入してある数字は，真数の世界の言葉に翻訳した真数です。対数の国での引き算は，真数の国においてはわり算です。だから真数の国で考えたときには，つまり実際に記入してある数字で考えた場合には，わり算になるのです。」

「君は実にすばらしいことに気がつきましたね。あの天才中学生に負けないぐらいの天才的な発見です。君は実に偉い！ワンダフル！実にグッド！（生徒笑い)」

7	−	3	=	4	対数
128	÷	8	=	16	真数

かけ算でも同様である。つまり実際の長さが対数であり，計算尺では足し算を計算している。それを真数語に翻訳すれば，かけ算になるというわけだ。

「ここで対数の性質を復習してみよう。対数の性質は，３つあった。言える人いるかな。」

B が手を挙げたので指名する。B に板書させる。

1． $\log_a RS \quad = \log_a R + \log_a S$

2． $\log_a (R \div S) \quad = \log_a R - \log_a S$

3． $\log_a R^p \quad = p \log_a R$

「ここで，この対数の性質の意味を考えてみよう。実は $\log_a$ は真数の言葉を対数の言葉に翻訳する機械，または翻訳しろという命令なんだ。だから $\log_a R$ は真数 R を対数語（r としておこう）に翻訳したものなんだ。$\log_a S$ は真数 S を対数語(s)に翻訳したものだ。すると $\log_a RS$ は真数 RS を対数語に翻訳したものということになる。だから公式が意味しているのは，真数の国におけるかけ算は，対数の国では足し算になるということになる。結局，３つの公式は，例の中学生が発見したことを式化したものだということになる。つまり，２番目の公式は，真数の国のわり算は対数の国では引き算ということだ。そして３番目の公式は，真数の国での p 乗は対数の国では p 倍というわけだ。」

$$
\begin{array}{cccc}
 & R & \times & S \\
\log_a & & & \\
 & r & + & s
\end{array}
$$

上の図を板書して，まとめとする。次時の予告として公式３の意味を考え，$\sqrt[5]{3}$ の計算を再度取り上げると言う。

◆対数の意味(2)　（１時間）

ここでは公式３の意味をもう一度考え，$\sqrt[5]{3}$ の記号操作の下に隠されていた意味（イメージ）を取り出すことを目標にする。最初に前時の復習をする。つまり，対数の３つの性質の意味は，中学生が発見した内容に他ならないことを復習する。

「性質１は，真数の世界でかけ算になるものは，対数の世界では足し算になる，ということを意味している。性質２は，真数の世界でわり算になるものは，対数の世界では引き算になる，ということを意味していた。性質３は，真数の世界で p 乗になるものは，対数の世界では p 倍になる，ということを意味していた。今日は性質３に焦点を当てたい。」そして，次の図を板書する。

$$
\log_a \quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "p\text{ 乗}"] \arrow[d, dotted] & R^p \\
\log_a R \arrow[r, "p\text{ 倍}"'] & p\log_a R \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

「さて，p101 の例 14 をもう１回復習してみよう。」

［例題］　$\sqrt[5]{3}$ の近似値を求めよ。

［答案］　$x=\sqrt[5]{3}$ とおいて両辺の対数をとると

$$
\begin{aligned}
\log_{10} x &= \log_{10} \sqrt[5]{3} \\
&= \log_{10} 3^{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{5}\log_{10} 3 \\
&= \frac{1}{5}\times 0.4771 \\
&= 0.09542
\end{aligned}
$$

したがって，常用対数表から $x \fallingdotseq 1.25$

「今日は，この記号操作の下にどんな意味やイメージが隠されているのか考えてみることにしよう。」

$$
\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "\frac{1}{5}\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{?} \\
0.4771 \arrow[r, "\frac{1}{5}\text{倍}"'] & 0.09542 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

「１行目の $\log_{10}3$ という計算では，3 という真数語を常用対数語に翻訳するように要求している。実は，常用対数表は真数語から対数語へ翻訳する辞書であったわけだ。常用対数表から，真数語の 3 は対数語では 0.4771 である。そして，

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{5}\log_{10} 3 \\
&=\frac{1}{5}\times 0.4771 \\
&=0.09542
\end{aligned}
$$

という計算の各行は，１行目は真数の世界での p 乗は対数の世界では p 倍に相当することをいっている。２行目，３行目では計算して p 倍を出している。ここで再び辞書である常用対数表を利用する。今度は，対数語を真数語に翻訳するので，常用対数表を逆読みする。そして，3 の $\frac{1}{5}$ 乗は約 1.25 であるということがわかった，というわけだ。（生徒には，納得顔の生徒とまだ怪訝そうな顔をしている生徒がいる。どんなに筋が通った説明でも，１回で納得し理解することは難しいものである。だから，同じような例題で何回か説明し，そして演習することが絶対に不可欠である。この演習なしに理解したという気持ちにはなれないものだ。）3 の $\frac{1}{5}$ 乗を正面から攻めていったら難攻不落のままであったろう。それを対数の世界に迂回することによって，落城させてしまったというわけだ。急がば回れだ。あるいは，玄関のドアは鍵がかかっていたので，勝手口に回って入り，内側から鍵を開けてしまったようなものだ（生徒笑い）。数学にも泥棒と同じような知恵が必要なんだ（生徒笑い）。迂路を得ることによって，秘密の扉はこじ開けられたのだ。」

この後，いくつかの類題を生徒に解かせる。

［類題］

I. $7^{\frac{3}{4}}$

II. 2^{30}

[I の解答]

$$\begin{tikzcd} 7 \arrow[r, "\frac{3}{4}\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{4.3} \\ 0.8451 \arrow[r, "\frac{3}{4}\text{倍}"'] & 0.6338 \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

[II の解答]

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "30\text{乗}"] \arrow[d, dotted, "\log_{10}"'] & \boxed{1.1\times10^9} \\ 0.3010 \arrow[r, "30\text{倍}"'] & 9.03=0.03+9 \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

何題か練習していくうちに，生徒たちはすべての類題が計算できるようになり，また，対数のイメージがつかめるようになるのである。前々任校でもほぼ 100%の生徒たちがこの問題を解けるようになった。

まとめとして次のように言う。

「数式操作や記号操作の背景には，というより数式操作や記号操作の内には，意味やイメージが必ずある。今回，例 14 の問題を通してその点がわかったと思う。イメージや意味がつかめれば，君たちにとって数学は身近なものになるはずだ。記号や式には，イメージが潜在している。潜在しているイメージをつかんでやることが大切であり，真の理解なのである。常にどんなイメージが潜在しているのか考える習慣をぜひともつけてほしい。」

以上が，まとめまでの展開例である。おそらく２回の授業によって，対数への興味（そして数学自体に対する興味も）は以前より深まっているはずである。この２回の授業の中には，割り箸で計算尺を作る作業学習が取り入れられているし，また，模式図を使って，イメージが喚起できるようになっている。普段より右脳はかなり刺激され，使われたはずである。

最後には問題演習の時間をとり，問題を解かせる。もちろんここでは，記号操作によって解かせるのである。前回２回の授業で痛切な印象をもっているので，式に潜んでいるイメージが何であるか考えるであろう。イメージは，生徒たちの力では必ずしもつかめるものではない。だが，努力するだけでも彼らの右脳は鍛えられるのである。右脳が鍛えられれば，少しずつイメージがつかめるようになるに違いないのである。もちろん，イメージがつかめないでへこたれそうになる場面では，指導者の援助が必要である。